Системы счисления

Система счисления – это совокупность правил записи чисел посредством конечного набора символов (цифр). другими словами, система счисления – это язык для записи чисел.

Положение цифры в числе называется разрядом.

Системы счисления бывают:

- непозиционными (в этих системах значение цифры не зависит от ее разряда);
- позиционными (значение цифры зависит от разряда).

Непозиционные системы счисления

Примеры: унарная, римская, древнерусская и др.

Позиционные системы счисления

Базис системы счисления – это список цифр, используемых в данной системе счисления.

Основание системы счисления – количество различных цифр, используемых в этой системе.

Вес разряда – отношение количественного эквивалента цифры в этом разряде к количественному эквиваленту той же цифры в нулевом разряде.

$p_i = w^i$,

где i – номер разряда, а w – основание системы счисления.

Разряды числа нумеруются справа налево, причем младший разряд целой части (стоящий перед разделителем — запятой или точкой) имеет номер ноль. Разряды дробной части имеют отрицательные номера:

Примеры позиционных систем счисления:

	Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
Базис B=	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	{0, 1}	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}
Основание w =	10	2	8	16

Перевод в десятичную систему счисления

По определению веса разряда

$p_i = w^i$,

где i – номер разряда, а w – основание системы счисления.

Тогда, обозначив цифры числа как a_i, любое число, записанное в позиционной системе счисления, можем представить в виде:

$$x = a_n*w^n + a_{n-1}*w^{n-1} + ... + a_2*w^2 + a_1*w^1 + a_0*w^0 + a_{-1}*w^{-1} + ...$$

Например, для системы счисления с основанием 4:

$$1302.2_4 = 1·4^3 + 3·4^2 + 0·4^1 + 2·4^0 + 2·4^{-1}$$

Выполнив вычисления, мы получим значение исходного числа, записанное в десятичной системе счисления (точнее, в той, в которой производим вычисления). В данном случае:

$$1302.2_4 = 1·4^3 + 3·4^2 + 0·4^1 + 2·4^0 + 2·4^{-1} == 1·64 + 3·16 + 0·4 + 2·1 + 2·0,25 =$$

$$= 64 + 48 + 2 + 0,5 = 114,5$$

Таким образом, для перевода числа из любой системы счисления в десятичную следует:

1. пронумеровать разряды исходного числа;
2. записать сумму, слагаемые которой получаются как произведения очередной цифры на основание системы счисления, возведенное в степень, равную номеру разряда;
3. выполнить вычисления и записать полученный результат.

Перевод из десятичной системы счисления

Вспомним пример перевода из системы счисления с основанием 4 в десятичную:

$$1302_4 = 1·4^3 + 3·4^2 + 0·4^1 + 2·4^0 = 114$$

Иначе это можно записать так:

$$114 = ((1 · 4 + 3) · 4 + 0) · 4 + 2 = 1302_4$$

Отсюда видно, что при делении 114 на 4 нацело в остатке должно остаться 2 — это младшая цифра при записи в четверичной системе. Частное же будет равно

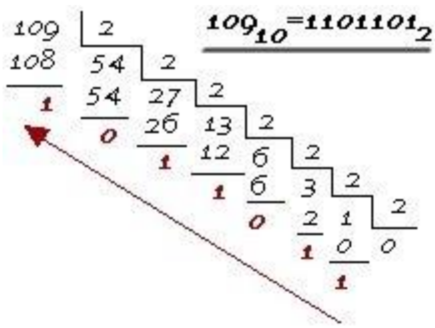
$$(1 · 4 + 3) · 4 + 0$$

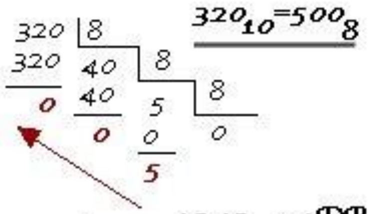
Деление его на 4 даст остаток — следующую цифру (0) и частное 1 · 4 + 3. Продолжая действия, получим аналогичным образом и оставшиеся цифры.

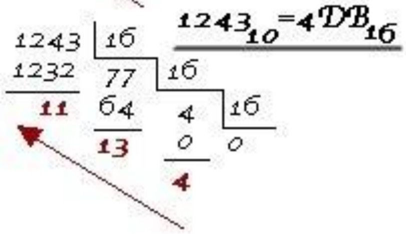
В общем случае для перевода целой части числа из десятичной системы счисления в систему с каким-либо другим основанием необходимо:

1. Выполнить последовательное деление **с остатком** исходного числа и каждого полученного частного на основание новой системы счисления.
2. Записать вычисленные остатки, начиная с последнего (т.е. в обратном порядке)

Примеры:







Системы счисления с кратными основаниями

При работе с компьютерами широко применяют двоичную систему счисления (поскольку на ней основано представление информации в компьютере), а также восьмеричную и шестнадцатеричную, запись в которых более компактна и удобна для человека. С другой стороны, благодаря тому что 8 и 16 – степени 2, переход между записью в двоичной и одной из этих систем осуществляется без вычислений.

Достаточно заменить каждый разряд шестнадцатеричной записи четырьмя ($16=2^4$) разрядами двоичной (и наоборот) по таблице.

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Аналогично происходит и перевод между двоичной и восьмеричной системой, только разряд восьмеричной соответствует трем разрядам двоичной ($8=2^3$)

Арифметика

Арифметические операции в позиционной системе с любым основанием производятся по одним и тем же правилам: сложение, вычитание и умножение «в столбик», а деление — «уголком». Рассмотрим пример выполнения действий сложения и вычитания в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

Сложение

Двоичная система:

В нулевом разряде: 1 + 0 = 0

В первом разряде: 1 + 1 = 2. 2 переносится в старший (2-й) разряд, обращаясь в единицу переноса. В первом разряде остается 2 - 2 = 0.

Во втором разряде: 0 + 1 + 1 (перенос) = 2; Переносим в старший разряд,

В третьем разряде: 1 + 1 + 1 (перенос) = 3; В старший разряд переносим 2, здесь остается 3 - 2 = 1.

Продолжая вычисления, получим:

$$10011011_2 + 1001110_2 = 11101001_2$$

Восьмеричная система:

Выполняем вычисления аналогично двоичной системе, но в старший разряд переносим 8. Получаем:

$$34261_8 + 4435_8 = 40716_8$$

Шестнадцатеричная система:

$$A391_{16} + 8534_{16} = 128C5_{16}$$

Вычитание

Двоичная система:

В нулевом разряде: 1 - 0 = 1

В первом разряде: 1 - 1 = 0.

Во втором разряде: 0 - 1; необходимо занять единицу старшего разряда. Поскольку веса разрядов двоичной системы отличаются в 2 раза: 2 + 0 - 1 = 1

Из третьего разряда занимали единицу, там остался 0, поэтому вновь нужно занимать из старшего разряда.

Продолжая вычисления, получим:

$$10011011_2 - 1001110_2 = 1001101_2$$

Восьмеричная система:

Выполняем вычисления аналогично двоичной системе, но, занимая из старшего разряда, получаем 8. В результате:

$$34261_8 - 4435_8 = 27624_8$$

Шестнадцатеричная система:

$$A391_{16} - 8534_{16} = 1E3D_{16}$$